

Cálculo multivariable

ÁREA: MATEMÁTICAS

01 Presentación

El estudio del cálculo de funciones de varias variables en programas de educación superior, ayuda a extender la capacidad para comprender y modelar fenómenos complejos que dependen de múltiples factores o variables. En ciencias básicas, por ejemplo, se usa para describir campos vectoriales como el movimiento de fluidos o las fuerzas electromagnéticas, analizar la distribución de calor en sólidos o modelar ecosistemas con múltiples variables interdependientes. Para la ingeniería, el cálculo de varias variables es indispensable para el diseño y optimización de sistemas de tres o más dimensiones, permitiendo el análisis de esfuerzos en estructuras, el flujo de fluidos, la optimización de rutas o el control de procesos con múltiples entradas y salidas. Para los programas de matemáticas o licenciatura en matemáticas, este curso es una progresión natural que sienta las bases del análisis real de n variables, la geometría diferencial y la topología, fomentando la comprensión de espacios multidimensionales y las transformaciones. Incluso en programas como ciencias de la computación, es relevante para el procesamiento de imágenes, gráficos 3D, machine learning (con la optimización de funciones de costo en redes neuronales) y la inteligencia artificial. En arquitectura, permite el diseño y análisis estructural de formas orgánicas y superficies complejas. El dominio de conceptos como derivadas parciales, gradientes, integrales múltiples (dobles y triples), teoremas fundamentales (Green, Stokes, Divergencia) y la optimización sin restricciones permite a los estudiantes resolver problemas de mayor complejidad con rigor científico. Además, alinea los programas con la misión institucional de fomentar competencias analíticas, de modelado y de pensamiento crítico, fundamentales para la innovación y la investigación aplicada en el contexto actual del país.

02 Competencias genéricas

4

- Abstraer, analizar y sintetizar.
- Identificar, plantear y resolver problemas.
- Trabajar en equipo y autónomamente.
- Comunicar las ideas de forma oral y escrita.

03 Competencias específicas

4

- Formular conjeturas, establecer relaciones, justificar procedimientos y construir argumentos matemáticos válidos.

- Identificar, modelar y resolver situaciones problemáticas mediante estrategias matemáticas adecuadas, evaluando la pertinencia de los resultados.
- Expresar, interpretar y argumentar ideas matemáticas utilizando lenguaje verbal, simbólico, gráfico y tabular de manera clara y precisa.
- Representar situaciones del mundo real mediante modelos matemáticos, analizarlos, interpretar los resultados y valorar sus alcances y limitaciones.

04 Niveles de desempeño

Insuficiente menos del 60%

El estudiante no alcanza los desempeños mínimos esperados. Esto se evidencia en que presenta dificultades, en la mayoría de las situaciones planteadas, para determinar el dominio o el límite de una función de varias variables y para plantear las derivadas parciales y las integrales dobles y triples, y sus desarrollos resultan incompletos al interpretar geométricamente el resultado obtenido, sus intervenciones se limitan a respuestas breves que no desarrollan las ideas solicitadas, presenta imprecisiones en la comunicación de ideas matemáticas, su participación en las actividades propuestas es limitada y no cumple con la mayoría de los compromisos académicos establecidos.

Básico 60% - 74%

El estudiante alcanza los desempeños esperados. Esto se evidencia en que calcula, con un desarrollo completo en la mayoría de los casos, límites, derivadas parciales e integrales dobles y triples sobre regiones sencillas, reconoce las superficies cuádricas y aplica la regla de la cadena en situaciones directas, sus intervenciones responden a lo solicitado, comunica ideas matemáticas con claridad, cumple con las actividades propuestas y es responsable con sus compromisos académicos.

Alto 75% - 84%

El estudiante supera los desempeños esperados. Esto se evidencia en que aplica con pertinencia el gradiente, las derivadas direccionales y los cambios de variable en integrales múltiples, y desarrolla de manera completa problemas de plano tangente, integrales de línea y de superficie, interpretando los resultados en el contexto de la situación, sus intervenciones amplían o enriquecen la discusión, comunica ideas matemáticas con precisión y fluidez, participa de manera activa y propositiva en las actividades del curso, y cumple sus compromisos académicos con autonomía.

El estudiante supera ampliamente los desempeños esperados. Esto se evidencia en que modela problemas complejos de ingeniería mediante campos escalares y vectoriales, relaciona los teoremas de Green, Stokes y de la divergencia con el fenómeno que analiza y valida sus soluciones mediante enfoques originales, como elegir el sistema de coordenadas más conveniente o contrastar el cálculo directo con la aplicación de un teorema integral, sus intervenciones proponen ideas o preguntas que amplían los temas trabajados, comunica ideas matemáticas con rigor, demuestra liderazgo y colaboración en las actividades del curso, y toma la iniciativa para ir más allá de los compromisos académicos establecidos.

05 Aprendizajes esperados del curso

5

Identifica, formula y resuelve problemas complejos de ingeniería, aplicando principios de ingeniería, ciencias y matemáticas

RACA10 Resuelve problemas en el contexto de las matemáticas o de otras ciencias que involucran el uso de la derivada parcial y total de funciones de varias variables

DESCRIPTORES · 10

- | | |
|---------------|--|
| ICCA56 | Representa puntos y vectores en el espacio, determina la distancia entre dos puntos en el espacio y la relaciona con la longitud del vector que los une |
| ICCA57 | Interpreta y representa gráficamente superficies en el espacio usando el sistema de coordenadas cartesianas. |
| ICCA58 | Expresa e interpreta numéricamente, algebraicamente y gráficamente la relación funcional entre varias variables en diversas situaciones. |
| ICCA59 | Justifica la existencia o inexistencia de límites de funciones de varias variables a partir de representaciones numéricas, gráficas o algebraicas. |
| ICCA60 | Argumenta la continuidad o discontinuidad de una función de varias variables en un punto dado. |
| ICCA61 | Explica la relación entre la derivada de funciones de varias variables y la de funciones de una variable e interpreta geométricamente la derivada de funciones de dos variables. |
| ICCA62 | Usa diferentes formatos (verbal, numérico, algebraico y gráfico) para representar la derivada de funciones escalares y vectoriales según sea el caso. |
| ICCA63 | Formula y ejecuta estrategias para resolver problemas relacionados con el vector gradiente y la derivada direccional de funciones de varias variables. |
| ICCA64 | Aplica la regla de la cadena para determinar la derivada de funciones compuestas que relacionan varias variables e interpreta los resultados de acuerdo al contexto |
| ICCA65 | Justifica la relación entre derivada de una función en un punto dado y el vector normal al plano tangente a la superficie dada por la función en dicho punto. |

RACA11 Resuelve problemas de máximos y mínimos aplicando los criterios de la primera y segunda derivada de funciones de varias variables que modelan situaciones reales o idealizadas.

DESCRIPTORES · 5

- | | |
|--------|---|
| ICCA66 | Argumenta la relación implícita entre varias variables en una o varias ecuaciones y determina e interpreta su derivada. |
| ICCA67 | Utiliza criterios de la derivada para determinar valores extremos de una función de la derivada. |
| ICCA68 | Justifica el uso del teorema de Lagrange en el cálculo de extremos condicionados con una o varias restricciones. |
| ICCA69 | Aplica los criterios de la primera y segunda derivada de funciones de varias variables para calcular los valores extremos de una función. |
| ICCA70 | Formula y ejecuta estrategias para resolver situaciones que involucren relaciones entre varias variables y procesos de optimización. |

RACA12 Formula, transforma y evalúa integrales dobles en distintas regiones del plano, seleccionando representaciones adecuadas y justificando los procedimientos utilizados

DESCRIPTORES · 6

- | | |
|--------|---|
| ICCA71 | Interpreta la integral doble como acumulación sobre una región. |
| ICCA72 | Evalúa integrales dobles sobre regiones rectangulares. |
| ICCA73 | Describe y parametriza regiones generales en el plano. |
| ICCA74 | Evalúa integrales dobles sobre regiones no rectangulares. |
| ICCA75 | Aplica cambios de variable en integrales dobles justificando el uso del Jacobiano. |
| ICCA76 | Resuelve problemas de cálculo de área, volumen, masa, centroide usando integrales dobles. |

RACA13 Formula y evalúa integrales triples en sólidos del espacio, utilizando cambios de variable y sistemas de coordenadas adecuados

DESCRIPTORES · 7

- | | |
|--------|---|
| ICCA77 | Interpreta la integral triple como acumulación en el espacio. |
| ICCA78 | Evalúa integrales triples sobre paralelepípedos. |
| ICCA79 | Describe sólidos mediante límites adecuados (intervalos, curvas y superficies). |
| ICCA80 | Evalúa integrales triples sobre regiones generales. |
| ICCA81 | Aplica cambios de variable en integrales triples usando el Jacobiano. |

ICCA82 Utiliza coordenadas cilíndricas y esféricas en la evaluación de integrales.

ICCA83 Resuelve problemas de cálculo de volumen, masa, densidad variable usando integrales triples.

RACA14 **Evalúa integrales de línea y de superficie mediante parametrizaciones adecuadas, para la solución de problemas en contextos matemáticos y aplicados**

DESCRIPTORES · 11

ICCA84 Parametriza curvas en el plano y en el espacio.

ICCA85 Calcula integrales de línea de campos escalares.

ICCA86 Calcula integrales de línea de campos vectoriales.

ICCA87 Interpreta el significado físico (trabajo, circulación).

ICCA88 Parametriza superficies en $\mathbb{R}^3$.

ICCA89 Calcula integrales de superficie de campos escalares y vectoriales.

ICCA90 Aplica el Teorema de Green en la solución de problemas.

ICCA91 Relaciona integrales de línea con integrales dobles.

ICCA92 Aplica el Teorema de Stokes en superficies orientadas.

ICCA93 Aplica el Teorema de la Divergencia para el cálculo de flujos en superficies cerradas.

ICCA94 Resuelve problemas de cálculo vectorial haciendo uso del teorema adecuado según el problema.

06 Unidades temáticas

3

1 Funciones de varias variables, límite y continuidad

Superficies cilíndricas y superficies cuádricas, Funciones de varias variables, dominio y gráfica, Límite y cálculo de límite de funciones de varias variables, continuidad.

2 Derivada de funciones de varias variables

Derivadas parciales, derivadas direccionales, interpretación geométrica de las derivadas parciales, gradiente y forma matricial de la derivada, Derivadas de orden superior, regla de la cadena, plano tangente y recta normal, rotacional y divergencia, derivada implícita, Valores extremos, extremos condicionados, problemas de máximos y mínimos.

3 Integración sobre campos escalares y vectoriales

Integrales dobles y cambio de variables, integrales triples y cambio de variables. Aplicaciones de las integrales dobles y triples. Integración sobre campos vectoriales, integrales de línea, teorema de Green, integrales de superficie, teorema de Stokes y teorema de la divergencia.

07 Orientaciones pedagógicas

El Departamento de Matemáticas y Estadística concibe la enseñanza como un proceso orientado al desarrollo del pensamiento matemático y estadístico, mediante experiencias de aprendizaje que promuevan la comprensión conceptual, el razonamiento, la resolución de problemas, la modelación, la interpretación de información y la comunicación rigurosa de ideas. Desde esta perspectiva, el aprendizaje trasciende la adquisición de contenidos y procedimientos, favoreciendo el desarrollo de capacidades que permitan a los estudiantes enfrentar con fundamento situaciones propias de su formación académica, profesional y ciudadana.

PRINCIPIOS ORIENTADORES

El presente marco establece los principios que orientan el diseño, desarrollo y evaluación de los cursos ofrecidos por el Departamento de Matemáticas y Estadística. Su finalidad es fortalecer la coherencia curricular, promover una cultura de calidad académica y ofrecer referentes compartidos para la práctica docente, respetando la autonomía profesoral y la diversidad de estrategias metodológicas propias de la educación superior.

Estos principios se sustentan en referentes nacionales e internacionales sobre la enseñanza de las matemáticas y la estadística, el diseño curricular basado en resultados de aprendizaje y el aseguramiento de la calidad en educación superior (Biggs & Tang, 2011; GAISE College Report ASA Revision Committee, 2021; National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2014; National Research Council, 2001; OECD, 2023).

- 1. La enseñanza promueve el desarrollo de capacidades para comprender, razonar, representar, argumentar, modelar e interpretar situaciones desde perspectivas matemáticas y estadísticas. En consecuencia, los contenidos disciplinares constituyen un medio para desarrollar formas de pensamiento que permitan a los estudiantes comprender la realidad, enfrentar problemas complejos y transferir el conocimiento a diferentes contextos profesionales y sociales.**

En ese sentido, la enseñanza debe orientarse al desarrollo progresivo de conocimientos, habilidades y actitudes que permitan al estudiante comprender, modelar, analizar y resolver situaciones propias de su contexto académico y profesional. Los contenidos constituyen un medio para alcanzar los resultados de aprendizaje y no un fin en sí mismos.

2. **El diseño de los cursos parte de resultados de aprendizaje claramente definidos que orientan las experiencias de enseñanza, las actividades de aprendizaje y los procesos de evaluación. Esta articulación favorece la coherencia curricular, proporciona claridad sobre las expectativas formativas y garantiza que las evidencias de aprendizaje reflejen los desempeños esperados al finalizar el proceso educativo.**

En consecuencia, toda actividad de enseñanza, aprendizaje y evaluación debe responder explícitamente a los resultados de aprendizaje definidos para el curso. La planeación de clases, las actividades propuestas y los instrumentos de evaluación deben mantener una alineación constructiva entre resultados, estrategias didácticas y evidencias de aprendizaje.

3. **El Departamento promueve experiencias de aprendizaje que permitan a los estudiantes utilizar los conocimientos matemáticos y estadísticos para analizar, representar e interpretar situaciones provenientes de diferentes disciplinas y contextos. La resolución de problemas, la modelación matemática y el análisis de datos favorecen la integración de conceptos, el desarrollo del razonamiento y la construcción de explicaciones fundamentadas, fortaleciendo la capacidad para comprender fenómenos y apoyar la toma de decisiones.**

Por lo tanto, la resolución de problemas constituye el principal contexto para la construcción y aplicación del conocimiento matemático y estadístico. Los estudiantes deben enfrentarse a situaciones que demanden interpretar, representar, modelar, argumentar, validar soluciones y comunicar resultados, favoreciendo el desarrollo del pensamiento matemático.

4. **El aprendizaje adquiere significado cuando los estudiantes comprenden las ideas fundamentales de la disciplina, establecen relaciones entre diferentes representaciones, justifican sus procedimientos y comunican sus conclusiones con precisión y rigor.**

En consecuencia, la enseñanza debe promover la comprensión de conceptos, propiedades y relaciones matemáticas antes de enfatizar la aplicación mecánica de algoritmos o procedimientos. Se favorecerá el establecimiento de conexiones entre diferentes representaciones, ideas y contextos. En ese sentido, los contenidos deben relacionarse, cuando sea pertinente, con problemas propios de las disciplinas profesionales de los estudiantes, favoreciendo la transferencia del conocimiento matemático y estadístico hacia contextos reales, científicos, tecnológicos y sociales.

5. La práctica docente reconoce la diversidad de trayectorias de aprendizaje de los estudiantes y propicia ambientes académicos caracterizados por el respeto, la participación, la colaboración y el compromiso con el aprendizaje.

Por lo tanto, la evaluación debe concebirse como un proceso continuo de retroalimentación que permita identificar avances, dificultades y oportunidades de mejora. Se promoverá la utilización de estrategias diagnósticas, formativas y sumativas coherentes con los resultados de aprendizaje y los criterios de evaluación establecidos.

Asimismo, la incorporación de recursos tecnológicos debe fortalecer la comprensión conceptual, la experimentación, la visualización, la modelación, el análisis de datos y la resolución de problemas, evitando que las herramientas tecnológicas sustituyan el razonamiento matemático.

CONSIDERACIONES FINALES

Los principios establecidos en este documento constituyen un marco institucional para orientar el desarrollo de los cursos del Departamento de Matemáticas y Estadística. Su propósito no es definir metodologías únicas de enseñanza ni limitar la autonomía profesoral, sino ofrecer referentes compartidos que contribuyan a la calidad académica, la coherencia curricular y el logro de los resultados de aprendizaje.

08 Bibliografía

5

-
- Marsden, J. E., & Tromba, A. J. Cálculo vectorial. Pearson Educación.
 - Stewart, J. Cálculo de varias variables: Trascendentes tempranas. Cengage Learning.
 - Pita Ruiz, C. Cálculo vectorial. Pearson Educación.
 - Thomas, G. B. Cálculo. Varias variables. Pearson Educación.
 - Apostol, T. M. Calculus, Vol. 2. Reverté.